第 6 章　向量代数与空间解析几何

（本章数二不作要求）

基础知识与规律总结

6.1　向量代数

一、向量概念及坐标表示

（1）向量：既有大小又有方向的量，一般用小写字母上面加一箭头或黑体字母表示，如向量 $\boldsymbol{a}$.

注 两个向量大小相等，方向相同，则称这两个向量相等.

（2）向量的模：表示向量的大小，对向量 $\boldsymbol{a}$，向量的模一般记为 $|\boldsymbol{a}|$.

（3）向量的坐标表示：

若在直角坐标系 $O-XYZ$ 中，向量 $\boldsymbol{a}$ 在各坐标轴的投影为 x,y,z，则向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $O-XYZ$ 中的坐标为 $\{x,y,z\}$，即 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=\{x,y,z\}$，其模 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

若 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间直角坐标系中的两点，则

向量
$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\};$$
$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

注 向量的坐标是相对坐标系而言的，一个向量在不同的坐标系中的坐标一般不同.

（4）单位向量：模等于 1 的向量叫做单位向量，则与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量为 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$；与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同方向的单位向量为 $\dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}$.

【例 6.1】 已知两点 $A(4,0,5)$，$B(7,1,3)$，求与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量 $\boldsymbol{e}$.

【解】 因为 $\overrightarrow{AB}=\{7-4,1-0,3-5\}=\{3,1,-2\}$，

所以 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$，

于是 $\boldsymbol{e}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2)$.

（5）零向量：模等于 0 的向量叫做零向量.

（6）负向量：与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相同方向相反的向量，记作：$-\boldsymbol{a}$.

（7）向量平行：两个非零向量如果它们的方向相同或相反，则称这两个向量平行.

注 零向量与任何向量平行.

(8) 方向角：非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与三条坐标轴的夹角 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角.

(9) 方向余弦：设 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$，则 $\cos\alpha=\dfrac{x}{|\boldsymbol{a}|}$，$\cos\beta=\dfrac{y}{|\boldsymbol{a}|}$，$\cos\gamma=\dfrac{z}{|\boldsymbol{a}|}$，

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

注 以向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为坐标的向量是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，且有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

【例 6.2】 已知两点 $A(1,0,1)$，$B(0,\sqrt{2},0)$，求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦和方向角.

【解】 因为 $\overrightarrow{AB}=\{0-1,\sqrt{2}-0,0-1\}=\{-1,\sqrt{2},-1\}$，

所以 $$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+1^2}=2,$$

于是 $$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=-\frac{1}{2};$$

从而 $$\alpha=\frac{2}{3}\pi,\beta=\frac{1}{4}\pi,\gamma=\frac{2}{3}\pi.$$

二、向量的运算

1. 向量的加减运算

(1) 向量的加法遵从以下两个法则.

平行四边形法则：将两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的起点均放在点 O 处，以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形，设 P 为 O 的对角顶点，则 $\overrightarrow{OP}$ 就是向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的和，即 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 6-1 所示.

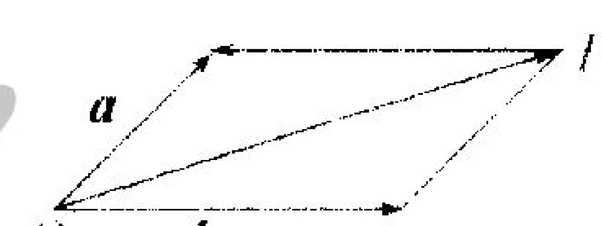


图 6-1

三角形法则：将向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 首尾相接，则以第一个向量的起点为起点，以第二个向量的终点为终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 就是向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的和，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 6-2 所示.

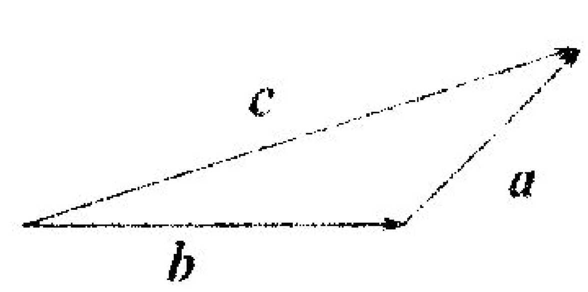


图 6-2

(2) 设有两个向量 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，

则 $$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2\}$$

2. 向量的数乘运算

设有向量 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ 及常数 λ，则 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积为数乘向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，且

$$\lambda\boldsymbol{a}=\begin{cases}|\lambda||\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0 & \lambda>0\\ 0 & \lambda=0\text{，其中 }\boldsymbol{a}^0\text{ 为与 }\boldsymbol{a}\text{ 同向的单位向量，}\\ -|\lambda||\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0 & \lambda<0\end{cases}$$

且 $$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\}.$$

3. 两个向量的数量积

(1) 定义.

设有两个向量 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，

则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积定义为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$，

其中 $\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

(2) 运算律：

① 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

② 分配律 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$；

③ 与数乘向量的运算 $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.

4. 两个向量的向量积

(1) 定义：设有两个向量 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，若存在一个向量 $\boldsymbol{c}$，满足以下条件：

① $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$；

② $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$；

③ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 成右手系，

则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$.

几何意义：$|\boldsymbol{c}|$ 表示以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

(2) 运算律：

① 反交换律 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

② 分配律 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$；

③ 与数乘向量的运算 $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$.

5. 混合积

(1) 定义：设 $\boldsymbol{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}$.

几何意义：$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|$ 表示以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

(2) 性质：

① 具有轮换对称性，即 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$；

② 两向量互换，混合积变号，即

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})=-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$.

【例 6.3】 设 $\boldsymbol{a}=\{1,0,-2\}$，$\boldsymbol{b}=\{-3,1,1\}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

【解】 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times(-3)+0\times1+(-2)\times1=-5$.

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&-2\\-3&1&1\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}=\{2,5,1\}.$$

【例 6.4】 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，证明：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

【证】 因为 $\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，$\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$，

所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$,

$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$,

故 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

【例 6.5】 设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$,则 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$ ________.

【解】 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$

$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$

$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}+$

$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$

$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2\times2=4$.

三、两个向量的关系

设有两个向量 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$,$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$,

(1) 两个向量垂直的充要条件

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$;

(2) 两个向量平行的充要条件

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行 $\Leftrightarrow$ 存在不全为零的常数 λ,μ,使 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 对应坐标成比例,即 $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$.

(3) 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,可由下式求出

$$\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\ \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

(4) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数 λ,μ,v,使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+v\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,即 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$.

【例 6.6】 判断下列向量之间的位置关系(垂直或平行).

(1) $\boldsymbol{a}=\{2,-1,3\}$,$\boldsymbol{b}=\{-1,-2,0\}$;

(2) $\boldsymbol{a}=\{-3,4,0\}$,$\boldsymbol{b}=\{-6,8,0\}$.

【解】 (1) 因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times(-1)+(-1)\times(-2)+3\times0=0$,所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

(2) 显然 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 对应坐标成比例,故 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

【例 6.7】 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=5$,$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\dfrac{2\pi}{3}$,又 $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$,求 λ 值,使

(1) $\boldsymbol{c}\parallel\boldsymbol{d}$;　　(2) $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$.

【解】 (1) 因为 $\boldsymbol{c}\parallel\boldsymbol{d}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$.

而 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}=(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\lambda\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})=3\lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+9\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}$

$=\lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(\lambda+9)\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

因 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=2\cdot5\sin\dfrac{2\pi}{3}=5\sqrt{3}\neq0$,

所以由 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda+9=0$,解得 $\lambda=-9$.

(2) 因为 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=0$.

而 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})=3\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+9\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$

$=3\lambda|\boldsymbol{a}|^2+(9-\lambda)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3|\boldsymbol{b}|^2$

$$= 3\lambda \cdot 4 + (9-\lambda)|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{2\pi}{3} - 3 \cdot 25 = 17\lambda - 120.$$

所以由 $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{d} = 0$ 得 $17\lambda - 120 = 0$，解得 $\lambda = \dfrac{120}{17}$.

【例 6.8】 设向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ 共线，且 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} = -18$，求向量 $\boldsymbol{x}$.

【解】 设 $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{a} = \lambda\{2,-1,2\} = \{2\lambda,-\lambda,2\lambda\}$，

则 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} = \{2\lambda,-\lambda,2\lambda\} \cdot \{2,-1,2\} = 9\lambda = -18$，解之得 $\lambda = -2$.

故 $\boldsymbol{x} = \{-4,2,-4\}$.

【例 6.9】 设 $\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$ 垂直，求 $\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$.

【解】 由题设可知

$$\begin{cases}(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}) \cdot (7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}) = 0 \\ (\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}) \cdot (7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}) = 0\end{cases}，即 \begin{cases}7\boldsymbol{a}^2 + 16\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} - 15\boldsymbol{b}^2 = 0 \\ 7\boldsymbol{a}^2 - 30\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + 8\boldsymbol{b}^2 = 0\end{cases}.$$

消去 $\boldsymbol{a}^2$ 得 $46\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 23\boldsymbol{b}^2$，即 $2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^2$，代回方程组可得 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$.

于是
$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} = \frac{\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^2}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} = \frac{\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} = \frac{1}{2}.$$

故 $\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} = \dfrac{\pi}{3}$.

6.2 空间平面方程和空间直线方程

一、平面方程的几种形式

1. 点法式方程（过一已知点且与一已知向量垂直便可确定一个平面）

已知平面 Π 上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 和该平面的法向量 $\boldsymbol{n} = \{A,B,C\}$，则平面的点法式方程为

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0. \tag{1}$$

2. 一般式方程

在(1)中令 $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$，则 $Ax + By + Cz + D = 0$，称为平面的一般式方程，其中 A,B,C 不全为零.

若 $D = 0$，则平面过原点；

若 $C = 0$，则平面平行于 z 轴；

若 $B = C = 0$，则平面平行于 YOZ 平面；其他情况可类似写出.

3. 三点式方程（过空间中不共线的三个点可确定一平面）

设 $M_1 = (x_1,y_1,z_1)$，$M_2 = (x_2,y_2,z_2)$，$M_3 = (x_3,y_3,z_3)$ 为平面上不共线的三个点，则由它们所确定的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

4. 截距式方程

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

其中 a,b,c 分别为平面在三坐标轴上的截距，即平面通过三点 $(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$.

二、空间直线方程的几种形式

1. 一般式方程

已知空间中两相交平面

$$\Pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\Pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

可以确定一直线，则方程

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

称为直线的一般式方程，其中方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\{A_1,B_1,C_1\}\times\{A_2,B_2,C_2\}.$$

2. 标准式方程

已知直线上一点 $P\{x_0,y_0,z_0\}$，直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{l,m,n\}$，则直线的标准式方程为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

3. 两点式方程

已知空间中两个不同的点 $P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2)$ 可以确定唯一一条直线，向量 $\boldsymbol{P_1P_2}$ 就可作为直线的方向向量，则方程

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

称为直线的两点式方程.

4. 参数式方程

$$\begin{cases}x=x_0+lt\\y=y_0+mt,\\z=z_0+nt\end{cases}$$

$M(x_0,y_0,z_0)$ 为直线上的已知点，$\boldsymbol{s}=\{l,m,n\}$ 为直线的方向向量.

三、平面与平面、平面与直线、直线与直线的关系

1. 两个平面的位置关系

设有两个平面 $\Pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\Pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,

(1) 两平面平行 $\quad\Pi_1 /\!/ \Pi_2\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

(2) 两平面垂直 $\quad\Pi_1\perp\Pi_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

2. 两条空间直线方程的位置关系

设两条直线方程分别为：

$$L_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},L_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

(1) 两直线平行　$L_1 /\!/ L_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$.

(2) 两直线垂直　$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$.

(3) 两直线之间的夹角

$$\cos\theta=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

3. 直线与平面的位置关系

设直线方程 L 为：$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$，平面 Π 为：$Ax+By+Cz+D=0$.

(1) 直线与平面垂直　$L \perp \Pi \Leftrightarrow \frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}$.

(2) 直线与平面平行　$L /\!/ \Pi \Leftrightarrow Al+Bm+Cn=0$.

(3) 直线在平面上

L 在平面 Π 上 $\Leftrightarrow Al+Bm+Cn=0$，且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$.

4. 点到平面的距离

点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

5. 点到直线的距离

点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ 的距离公式为

$$d=\frac{\left\|\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

【例 6.10】 判定下列平面间的位置关系（垂直或平行）.

(1) $\Pi_1:3x-2y+4z-4=0$，$\Pi_2:2x+y-z+5=0$；

(2) $\Pi_1:3x-2y+4z-4=0$，$\Pi_2:6x-4y+8z+5=0$.

【解】 (1) Π_1,Π_2 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=\{3,-2,4\}$，$\boldsymbol{n}_2=\{2,1,-1\}$，

因为 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=3\times2+(-2)\times1+4\times(-1)=0$，所以两平面垂直.

(2) Π_1,Π_2 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=\{3,-2,4\}$，$\boldsymbol{n}_2=\{6,-4,8\}$，显然两个法向量的对应分量成比例，所以 $\boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2$，而 $\frac{3}{6}=\frac{-2}{-4}=\frac{4}{8}\neq\frac{-4}{5}$，故两平面平行但不重合.

【例 6.11】 判定下列直线间的位置关系（垂直或平行）.

(1) $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$，$L_2:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+3}{6}$；

(2) $L_1:\begin{cases}x+y+z-4=0\\x-y-z+2=0\end{cases}$，$L_2:\begin{cases}x-2y-z-1=0\\x-y-2z=0\end{cases}$.

【解】(1) L_1, L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{l}_1=\{1,2,3\}$，$\boldsymbol{l}_2=\{2,4,6\}$，显然 $\boldsymbol{l}_2=2\boldsymbol{l}_1$，故两直线 L_1, L_2 平行.

(2) 直线 L_1 的方向向量 $\boldsymbol{l}_1=\{1,1,1\}\times\{1,-1,-1\}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&1\\1&-1&-1\end{vmatrix}=\{0,2,-2\}$.

直线 L_2 的方向向量 $\boldsymbol{l}_2=\{1,-2,-1\}\times\{1,-1,-2\}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-2&-1\\1&-1&-2\end{vmatrix}=\{3,1,1\}$.

所以 $\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2=0\times3+2\times1+(-2)\times1=0$，故两直线垂直.

【例 6.12】判定下列直线与平面的位置关系(垂直、平行或直线在平面上).

(1) $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{0}$，$\Pi:x-y-6=0$；

(2) $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$，$\Pi:4x-2y+z-2=0$；

(3) $L:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+2}{2}$，$\Pi:2x-y+z+1=0$.

【解】(1) 直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{l}=\{2,2,0\}$，平面 Π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{1,-1,0\}$，

所以 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}=2\times1+2\times(-1)=0$，则 $\boldsymbol{l}\perp\boldsymbol{n}$，故直线 $L\parallel$ 平面 Π.

(2) 直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{l}=\{1,3,2\}\times\{2,-1,-10\}=\{-28,14,-7\}$，

平面 Π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{4,-2,1\}$，则 $\boldsymbol{l}\parallel\boldsymbol{n}$，故直线 $L\perp$ 平面 Π.

(3) 直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{l}=\{-1,0,2\}$，平面 Π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{2,-1,1\}$，

所以 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}=(-1)\times2+0\times(-1)+2\times1=0$，则 $\boldsymbol{l}\perp\boldsymbol{n}$，故直线 $L\parallel$ 平面 Π.

又直线上的点 $(1,1,-2)$ 在平面 $2x-y+z+1=0$ 上，所以直线 L 在平面 Π 上.

四、平面方程和直线方程的计算

1. 计算平面方程

首先需熟练掌握平面方程的各种形式. 求平面方程的一般方法如下：

(1) 若题设条件中平面过某点，则一般用点法式方程，此时问题转化为求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$.

(2) 若题设中，平面通过一条直线(该直线用两平面的交线表示)，则用平面束方程处理，即若直线方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}.$$

可设平面束方程为

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

然后结合其他条件求解平面方程.

【例 6.13】求满足下列条件的平面方程.

(1) 过点 $P_0(1,-2,3)$ 且与 P_0 和 $P_1(3,-1,5)$ 的连线垂直；

(2) 过 z 轴及点 $P(-3,2,1)$；

(3) 过点 $P_1(2,-1,1)$，$P_2(3,2,-1)$ 且平行于 x 轴；

(4) 过点 $P_1(2,-1,2)$，$P_2(3,5,-1)$ 且垂直于平面 $2x-5y+2z-5=0$；

(5) 通过直线 $L_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$ 且与 $L_2:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$ 平行；

(6) 过两平行直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{2}$，$L_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{2}$；

(7) 过直线 $\begin{cases}2x-3y+z-3=0\\x+3y+2z+1=0\end{cases}$ 且过点 $(2,0,0)$.

【解】(1) 因为平面与 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 垂直，则 $\overrightarrow{P_0P_1}=\{3-1,-1+2,5-3\}=\{2,1,2\}$ 是平面的法向量.

故所求平面方程为 $2(x-1)+(y+2)+2(z-3)=0$，即 $2x+y+2z=6$.

(2) 因为平面过 z 轴，可设平面方程为 $Ax+By=0$，又点 $P(-3,2,4)$ 在平面上，将其代入平面方程得 $-3A+2B=0\Rightarrow A=\dfrac{2}{3}B\quad(B\neq 0)$

故所求平面方程为 $\dfrac{2}{3}Bx+By=0$，即 $2x+3y=0$.

(3) 因为平面平行于 x 轴，可设平面方程为 $By+Cz+D=0$，因 P_1、P_2 在平面上，故 $\begin{cases}-B+C+D=0\\2B-C+D=0\end{cases}\Rightarrow B=-2D,C=-3D\quad(D\neq 0)$，

故所求平面方程为 $-2Dy-3Dz+D=0$，即 $2y+3z-1=0$.

【另解】可设 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{P_1P_2}\times\{1,0,0\}=\{0,-2,-3\}$，则所求平面方程为 $2y+3z-1=0$.

(4) 设所求平面法向量为 $\boldsymbol{n}$，已知平面法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\{2,-5,2\}$，$\overrightarrow{P_1P_2}=\{1,6,-3\}$，则 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{P_1P_2}$，$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_1$.

故取 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{P_1P_2}\times\boldsymbol{n}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&6&-3\\2&-5&2\end{vmatrix}=\{-3,-8,-17\}$.

故所求平面方程为 $-3(x-3)-8(y-5)-17(z+1)=0$，

即
$$3x+8y+17z-32=0.$$

(5) 设所求平面法向量为 $\boldsymbol{n}$，由于 L_1 在所求平面上，则 $\boldsymbol{n}\perp L_1$，$\boldsymbol{n}\perp L_2$，

故可取 $\boldsymbol{n}=\{2,-1,2\}\times\{0,1,-1\}=\{-1,2,2\}$，又 $(0,0,2)$ 在所求平面上，

故所求平面方程为 $-x+2y+2(z-2)=0$，即 $x-2y-2z+4=0$.

(6) 因为 L_1，L_2 都在所求平面上，所以直线 L_1 上的点 $P_1(1,1,2)$ 和直线 L_2 上的点 $P_2(0,-1,3)$ 在所求平面上. 设所求平面法向量为 $\boldsymbol{n}$，则 $\boldsymbol{n}\perp L_1$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{P_1P_2}$，

故可取 $\boldsymbol{n}=\{1,-2,2\}\times\overrightarrow{P_1P_2}=\{1,-2,2\}\times\{-1,-2,1\}=\{2,-3,-4\}$，

故所求平面方程为 $2(x-0)-3(y+1)-4(z-3)=0$，即 $2x-3y-4z+9=0$.

(7) 因为所给直线方程为一般式，则设所求平面方程为
$$\lambda(2x-3y+z-3)+\mu(x+3y+2z+1)=0,$$
整理得 $(2\lambda+\mu)x+(-3\lambda+3\mu)y+(\lambda+2\mu)z+(-3\lambda+\mu)=0$.

因为点 $(2,0,0)$ 在所求平面上，所以将其代入可得 $\lambda=-3\mu$，

故所求平面方程为 $-3(2x-3y+z-3)+(x+3y+2z+1)=0$，

即 $$5x-12y+z-10=0.$$

2. 计算直线方程

求直线方程关键是找直线上的一点及直线的方向向量. 对于题设条件中有一个已知点的情形，则一般考虑建立直线的参数方程；若题设条件中提及直线与直线、直线与平面相交的问题，则一般将所求直线方程化成参数式，有时也用一般式.

【例 6.14】 求满足下列条件的直线方程.

(1) 过点 $M(1,-2,4)$ 且与平面 $3x-2y+z-4=0$ 垂直.

(2) 过点 $M(-3,2,5)$ 且与两平面 $x-4z-3=0$，$2x-y-5z+1=0$ 的交线平行.

(3) 过点 $M(2,-3,5)$ 且与两直线 $L_1:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z-1}{4}$，$L_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-3}{2}$ 都垂直.

【解】 (1) 因为所求直线与平面 $3x-2y+z-4=0$ 垂直，所以与平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\{3,-2,1\}$ 平行，从而 $\boldsymbol{n}=\{3,-2,1\}$ 就是所求直线的方向向量，又 $M(1,-2,4)$ 在直线上，故所求直线方程为 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-4}{1}$.

(2) 设所求直线的方向向量为 $\{l,m,n\}$，由题设知，所求直线与两已知平面的交线平行，故与这两个平面都垂直，从而有

$$\begin{cases} l-4n=0 \\ 2l-m-5n=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l=4n \\ m=3n \end{cases}$$，则所求直线的方向数为 $\{4,3,1\}$.

故所求直线方程为 $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-5}{1}$.

(3) 设所求直线的方向向量为 $\{l,m,n\}$，因为所求直线与 L_1，L_2 均垂直，从而有

$$\begin{cases} 3l-5m+4n=0 \\ l-4m+2n=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l=-3m \\ n=\dfrac{7}{2}m \end{cases}$$，则所求直线的方向数为 $\{-6,2,7\}$.

故所求直线方程为 $\dfrac{x-2}{-6}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-5}{7}$.

【例 6.15】 求过点 $(-1,0,4)$，平行于平面 $\Pi:3x-4y+z=10$ 且与直线 $L_1:x+1=y-3=\dfrac{z}{2}$ 相交的直线方程.

【解】 设所求直线 L 为 $\begin{cases} x=-1+lt \\ y=mt \\ z=4+nt \end{cases}$，其方向向量 $\boldsymbol{s}=\{l,m,n\}$.

平面 $\Pi:3x-4y+z=10$，其方向向量 $\boldsymbol{n}=\{3,-4,1\}$.

直线 $L_1:x+1=y-3=\dfrac{z}{2}$，其方向向量 $\boldsymbol{s}_1=\{1,1,2\}$.

因为 $L\,/\!/$ 平面 Π，所以 $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}$，于是 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=0$，即 $3l-4m+n=0$.

因为直线 L 与 L_1 相交，所以 L 的方程代入 L_1 中得

$lt=mt-3=\dfrac{1}{2}(4+nt)$，即 $\begin{cases} (l-m)t=-3 \\ (2l-n)t=4 \end{cases}$，消去 t 得 $4m+3n-10l=0$.

解联立方程$\begin{cases}3l-4m+n=0\\4m+3n-10l=0\end{cases}$得 $l=\dfrac{4}{7}n, m=\dfrac{19}{28}n$.

取 $l=16, m=19, n=28$ 即得所求直线 L 的方程

$$\begin{cases}x=-1+16t\\y=19t\\z=4+28t\end{cases}.$$

【例 6.16】设有直线 $L_1: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$, $L_2: \dfrac{x+2}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$,证明:$L_1$ 与 L_2 是异面直线,并求平行于直线 L_1 和 L_2 且与它们等距离的平面方程.

【解】L_1、L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=\{-1,2,1\}$, $\boldsymbol{s}_2=\{0,1,-2\}$.

取 L_1、L_2 上的点 $M_1(1,0,-1)$, $M_2(-2,1,2)$,则$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-3,1,3\}$.

因为$\begin{vmatrix}-1&2&1\\0&1&-2\\-3&1&3\end{vmatrix}=10\neq 0$,所以 L_1 与 L_2 是异面直线.

又因为$\overline{M_1M_2}$ 的中点坐标为$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,

所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-1&2&1\\0&1&-2\end{vmatrix}=-5\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,

故所求平面方程为

$$-5\left(x+\frac{1}{2}\right)-2\left(y-\frac{1}{2}\right)-\left(z-\frac{1}{2}\right)=0, \text{即 } 5x+2y+z+1=0.$$

【例 6.17】判断下列两直线 $L_1: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{4}$ 和 $L_2: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{2}$ 是否在同一平面内,若是,则求两直线的交点;若不是,试求它们的最短距离.

【解】直线 L_1 与 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=\{2,3,4\}$和 $\boldsymbol{s}_2=\{1,1,2\}$,并且它们分别过点 $P(0,-3,0)$, $Q(1,-2,2)$,则$\overrightarrow{PQ}=\{1,1,2\}$.

直线 L_1 与 L_2 共面 $\Leftrightarrow$ 向量 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\overrightarrow{PQ}$ 共面,即混合积 $=0$.

因为$\begin{vmatrix}2&3&4\\1&1&2\\1&1&2\end{vmatrix}=0$,故直线 L_1 与 L_2 共面.

下面求直线 L_1 与 L_2 的交点,为此令$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{4}=t$,即 $x=2t, y=-3+3t, z=4t$.

代入 L_2 的方程中,

得
$$\frac{2t-1}{1}=\frac{-3+3t+2}{1}=\frac{4t-2}{2}.$$

解之得 $t=0$,代回 $L_1: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{4}=t$ 中,可得 $x=0, y=-3, z=0$,故$(0,-3,0)$为直线 L_1 与 L_2 的交点.

6.3 曲面方程与空间曲线方程

一、曲面方程基本概念

定义 1 如果曲面 S 与三元方程 $F(x,y,z)=0$ 有下述关系：

(1) 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$；

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程 $F(x,y,z)=0$，

则方程 $F(x,y,z)=0$ 就叫做曲面 S 的方程，而曲面 S 叫做方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形.

定义 2 如果 $F(x,y,z)=0$ 是一个关于 x,y,z 的二次方程，则 $F(x,y,z)=0$ 对应的曲面方程叫做二次曲面.

二、空间曲线方程

1. 空间曲线的一般方程

空间曲线可以看做两个曲面的交线，它的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}.$$

2. 空间曲线的参数方程

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t). \\ z=z(t) \end{cases}$$

三、柱面

1. 定义

平行于定直线并沿定曲线 c 移动的直线 l 形成的轨迹叫做柱面，定曲线 c 叫做柱面的准线，动直线 l 叫做柱面的母线.

一个一元方程或二元方程在空间直角坐标系中的图形都是一个柱面.

如，母线平行于 z 轴的柱面方程 $F(x,y)=0$，方程中只含两个变量，不含变量 z，其图形如图 6-3 所示.

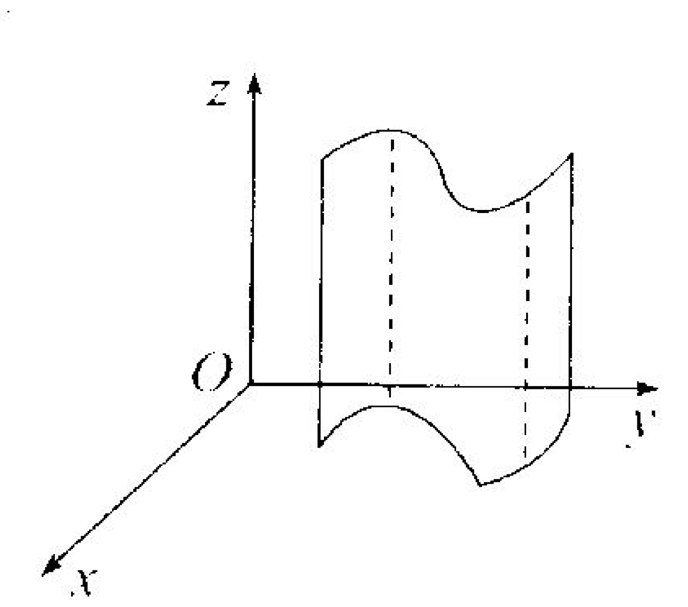


图 6-3

2. 常见的柱面

(1) 圆柱面 $x^2+y^2=R^2$，见图 6-4.

(2) 椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

(3) 抛物柱面 $y^2=2px$，见图 6-5.

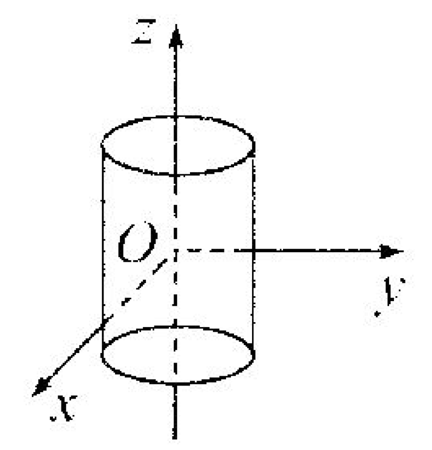


图 6-4

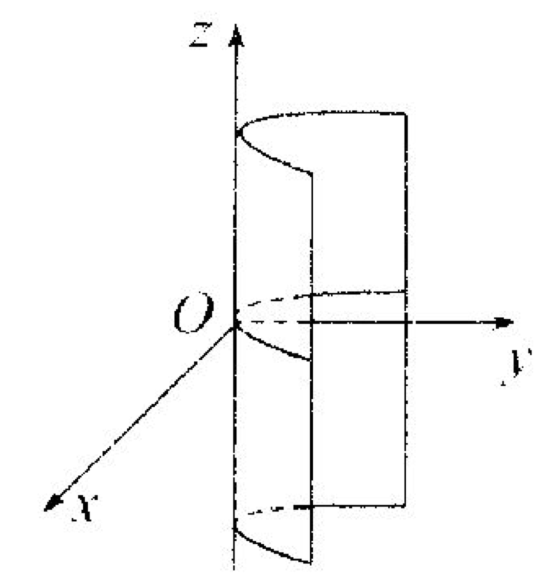


图 6-5

(4) 双曲柱面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

3. 计算柱面方程

(1) 母线与坐标轴平行的情形.

准线为$\Gamma:\begin{cases}f(x,y)=0\\z=0\end{cases}$,母线 // z 轴的柱面方程为 $f(x,y)=0$;

准线为$\Gamma:\begin{cases}\varphi(x,z)=0\\y=0\end{cases}$,母线 // y 轴的柱面方程为 $\varphi(x,z)=0$;

准线为$\Gamma:\begin{cases}\psi(y,z)=0\\x=0\end{cases}$,母线 // x 轴的柱面方程为 $\psi(y,z)=0$.

(2) 准线为$\Gamma:\begin{cases}f(x,y,z)=0\\g(x,y,z)=0\end{cases}$,母线的方向向量为$\{l,m,n\}$的柱面方程的求法.

首先,在准线上任取一点(x,y,z),则过点(x,y,z)的母线方程为

$$\frac{X-x}{l}=\frac{Y-y}{m}=\frac{Z-z}{n},$$

其中 X,Y,Z 为母线上任一点的流动坐标,消去方程组

$\begin{cases}f(x,y,z)=0\\g(x,y,z)=0\\\frac{X-x}{l}=\frac{Y-y}{m}=\frac{Z-z}{n}\end{cases}$ 中的 x,y,z 便得所求的柱面方程.

【例 6.18】设准线方程为$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\2x^2+2y^2+z^2=2\end{cases}$,母线的方向数为$\{-1,0,1\}$,求这个柱面方程.

【解】柱面的母线方程可表示为 $\frac{X-x}{-1}=\frac{Y-y}{0}=\frac{Z-z}{1}$,

令$\frac{X-x}{-1}=\frac{Y-y}{0}=\frac{Z-z}{1}=t$,则 $x=X+t,y=Y,z=Z-t$.

将其代入准线方程,有$\begin{cases}(X+t)^2+Y^2+(Z-t)^2=1\\2(X+t)^2+2Y^2+(Z-t)^2=2\end{cases}$, (2)

解之得$(Z-t)^2=0$,即 $t=Z$,将其代入(2),可得所求柱面方程

$$(X+Z)^2+Y^2=1.$$

【例 6.19】设准线方程为$\begin{cases}x+y-z=1\\x-y+z=0\end{cases}$,母线平行于直线 $x=y=z$,求该柱面方程.

【解】由题设可知，母线的方向向量为$\{1,1,1\}$，(x,y,z)为准线上任意一点，于是柱面的母线方程可表示为 $\frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{1}=\frac{Z-z}{1}$.

令$\frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{1}=\frac{Z-z}{1}=t$，则 $x=X-t, y=Y-t, z=Z-t$，代入准线方程，有

$$\begin{cases}(X-t)+(Y-t)-(Z-t)=1\\(X-t)-(Y-t)+(Z-t)=0\end{cases}, \tag{3}$$

解之得 $t=X-\frac{1}{2}$，将其代入(3)，可得所求柱面方程

$$2Y-2Z-1=0.$$

四、投影曲线

1. 定义

经过空间曲线Γ的每一点均有平面Π的一条垂线，这些垂线，构成一个柱面，称为Γ到平面Π上的投影柱面方程.

2. 空间曲线Γ在平面Π上的投影曲线的求法

① 求出通过空间曲线Γ且垂直于平面Π的投影柱面：$\varphi(x,y,z)=0$；

② 投影曲线为 $\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0\\ \Pi\text{的方程}\end{cases}$.

【例 6.20】 求直线 $L:\begin{cases}x=3-t\\y=-1+2t\\z=5+8t\end{cases}$ 在三个坐标面及平面$\Pi: x-y+3z+8=0$上的投影方程.

【解】直线 $L:\begin{cases}x=3-t\\y=-1+2t\\z=5+8t\end{cases}$ 在三个坐标面 xOy, xOz, yOz 上的投影方程分别为：

$$\begin{cases}x=3-t\\y=-1+2t,\\z=0\end{cases}\begin{cases}x=3-t\\y=0\\z=5+8t\end{cases},\begin{cases}x=0\\y=-1+2t.\\z=5+8t\end{cases}$$

下面求直线L在平面$\Pi: x-y+3z+8=0$上的投影方程.

先求出通过直线L且垂直于平面Π的平面Π^*的方程，此即直线L在平面Π上的投影柱面.

直线L的方向向量为$\boldsymbol{s}=\{-1,2,8\}$，平面$\Pi$的法向量$\boldsymbol{n}=\{1,-1,3\}$，设平面$\Pi^*$的法向量为$\boldsymbol{n}^*$，由投影柱面的意义有

$$\boldsymbol{n}^*=\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-1&2&8\\1&-1&3\end{vmatrix}=\{14,11,-1\}.$$

又平面Π^*通过直线L，可知直线L上的点$P(3,-1,5)$在平面Π^*上，于是该平面方程为

$$14(x-3)+11(y+1)-(z-5)=0,$$

即 $14x+11y-z-26=0$.

故所求L在平面Π上的投影方程为

$$\begin{cases}14x+11y-z-26=0\\x-y+3z+8=0\end{cases}.$$

3. 空间曲线 Γ: $\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\F_2(x,y,z)=0\end{cases}$ 在坐标平面 xOy 上的投影曲线的求法

① 从方程组$\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\F_2(x,y,z)=0\end{cases}$中消去 z,得到一个母线 // z 轴的柱面方程 $\varphi(x,y)=0$;

② 将 $\varphi(x,y)=0$ 与 $z=0$ 联立,即得 Γ 在 xOy 平面上投影方程$\begin{cases}\varphi(x,y)=0\\z=0\end{cases}$.

类似可求得 Γ: $\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\F_2(x,y,z)=0\end{cases}$ 在坐标平面 yOz, zOx 上的投影方程.

【例 6.21】求曲线 C: $\begin{cases}x=y^2+z^2\\x+2y-z=0\end{cases}$ 在三个坐标平面上的投影曲线方程.

【分析】从空间曲线 C 的方程$\begin{cases}x=y^2+z^2\\x+2y-z=0\end{cases}$中分别消去 x, y, z 即可得曲线 C 在三个坐标面上的投影柱面方程. 再与坐标面方程联立组成方程组,即得投影曲线方程.

【解】在$\begin{cases}x=y^2+z^2\\x+2y-z=0\end{cases}$中,消去 x,得

$$y^2+z^2+2y-z=0.$$

这是曲线 C 在 yOz 平面的投影柱面. 此投影柱面与 yOz 面的交线即为曲线 C 在 yOz 面上的投影曲线,故

$$\begin{cases}y^2+z^2+2y-z=0\\x=0\end{cases}$$

即为所求.

同理,消去 y 可得曲线 C 在 zOx 面的投影曲线$\begin{cases}x=\dfrac{1}{4}(z-x)^2+z^2\\y=0\end{cases}$.

消去 z 可得曲线 C 在 xOy 面的投影曲线$\begin{cases}x=y^2+(x+2y)^2\\z=0\end{cases}$.

【例 6.22】设曲线方程为$\begin{cases}2x^2+4y+z^2=4z\\x^2-8y+3z^2=12z\end{cases}$,求它在三个坐标面上的投影曲线方程.

【解】通过配方,将上述方程组变形为

$$\begin{cases}2x^2+4y+(z-2)^2=4\\x^2-8y+3(z-2)^2=12\end{cases},$$消去 z,可得 $x^2+4y=0$.

于是曲线在 xOy 平面上投影曲线方程为$\begin{cases}x^2+4y=0\\z=0\end{cases}$.

类似可求得曲线在 xOz, yOz 平面上投影曲线方程分别为

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 4z \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} z^2 - 4y = 4z \\ x = 0 \end{cases}.$$

五、旋转曲面

1. 定义

已知平面曲线 L 绕此平面上一定直线 l 旋转所成的曲面称为旋转曲面，定直线 l 叫做旋转曲面的轴，曲线 L 叫做母线.

如，曲线 $L:\begin{cases} f(y,z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成的曲面 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$，见图 6-6.

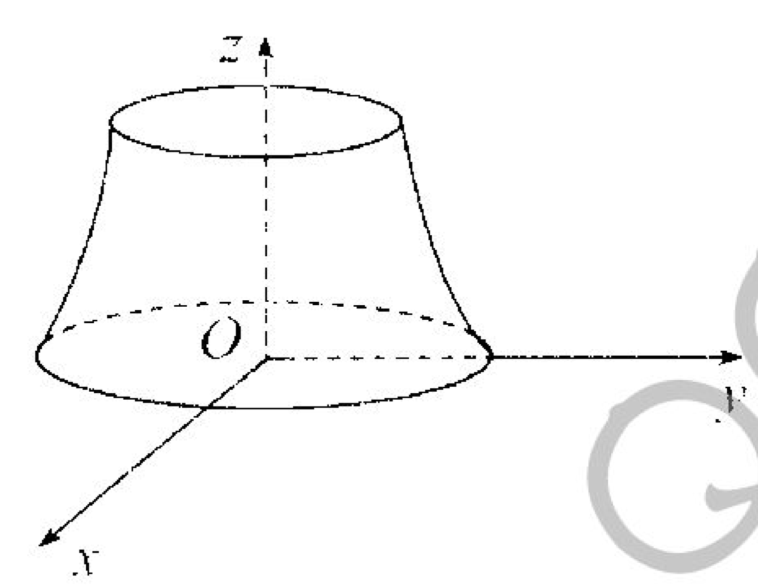


图 6-6

2. 坐标面上的曲线绕坐标轴旋转所得旋转曲面方程的求法如下

设曲线方程为 $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

① 若绕 y 轴旋转，则旋转曲面的方程为：$f(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y)$；

② 若绕 x 轴旋转，则旋转曲面的方程为：$f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2})$.

注 其他坐标面上曲线方程绕坐标轴旋转所成的旋转曲面方程类似，绕哪个轴旋转，那个轴所对应的变量不变，另一个变量用其他两个变量的平方和的算术平方根（加±号）代替.

【例 6.23】求下列各平面曲线的旋转曲面方程.

(1) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 分别绕 x 轴，y 轴. (2) $\begin{cases} x^2 = 2y \\ z = 0 \end{cases}$ 分别绕 x 轴，y 轴.

【解】(1) 绕 x 轴的旋转面方程为 $x^2 + 4(y^2+z^2) = 1$，

绕 y 轴的旋转面方程为 $x^2 + z^2 + 4y^2 = 1$.

(2) 绕 x 轴旋转所成的旋转曲面的方程为：$x^2 = 2\sqrt{y^2+z^2}$，即 $x^4 = 4(y^2+z^2)$.

绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为：$x^2 + z^2 = 2y$.

3. 空间曲线 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ 绕 x 轴旋转所得旋转曲面的方程为

$\begin{cases} y^2 + z^2 = y^2(t) + z^2(t) \\ x = x(t) \end{cases}$ 消去 t 即可得. 类似可得绕 y、z 轴旋转所得曲面的方程.

【例 6.24】求直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\Pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0，并求 L_0 绕 y 轴旋转一周所得曲面的方程.

【解】由题设可知平面 Π 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{1,-1,2\}$，直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}=\{1,1,-1\}$. 设通过直线 L 且垂直于平面 Π 的平面为 Π^*，即直线 L 在平面 Π 上的投影柱面.

设平面 Π^* 的法向量为 $\boldsymbol{n}^*$，因为 $\boldsymbol{n}^* \perp \boldsymbol{n}$ 且 $\boldsymbol{n}^* \perp \boldsymbol{s}$，所以

$$\boldsymbol{n}^*=\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\{1,-3,-2\}.$$

又平面 Π^* 通过直线 L，可知直线 L 上的点 $P(1,0,1)$ 在平面 Π^* 上，于是该平面方程为

$$1(x-1)+(-3)(y-0)-2(z-1)=0,$$

即

$$x-3y-2z+1=0.$$

于是 L_0 的方程为 $\begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ x-3y-2z+1=0 \end{cases}$，消去 z 得 $x=2y$；消去 x 得 $z=\dfrac{1}{2}(1-y)$.

令 $y=t$，可得 L_0 的参数方程 $\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=\dfrac{1}{2}(1-t) \end{cases}$.

故所求旋转曲面方程为

$$x^2+z^2=(2t)^2+\left[\frac{1}{2}(1-t)\right]^2=(2y)^2+\left[\frac{1}{2}(1-y)\right]^2,$$

即 $4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$.

注 平面 Π^* 还可以这样求解：

设 (x,y,z) 为 Π^* 上任意一点，则 $\boldsymbol{s}_1=\{x-1,y,z-1\}$ 平行于平面 Π^*.

又 $\boldsymbol{s}\,/\!/\,\Pi$，$\boldsymbol{n}\,/\!/\,\Pi$，所以 $\boldsymbol{s},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}_1$ 共面，于是

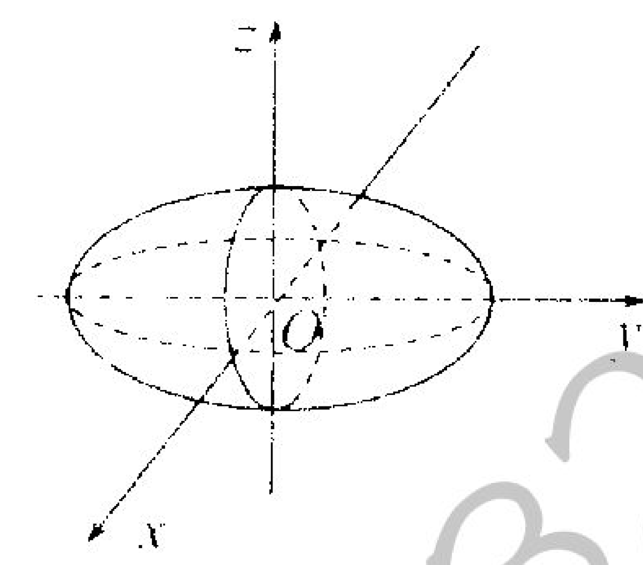
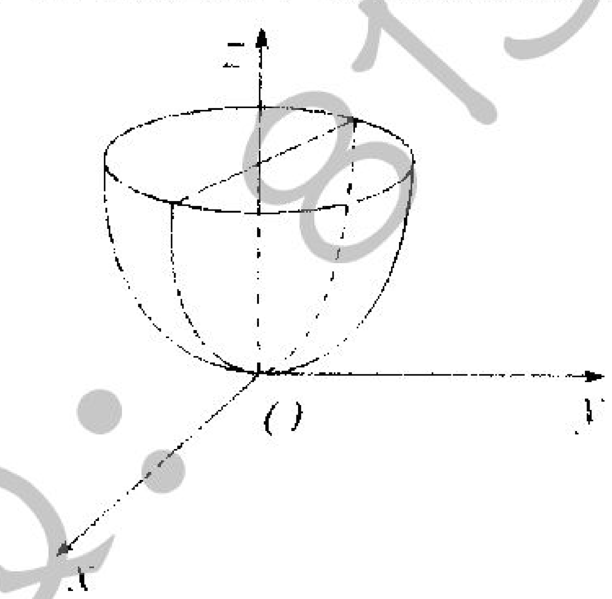
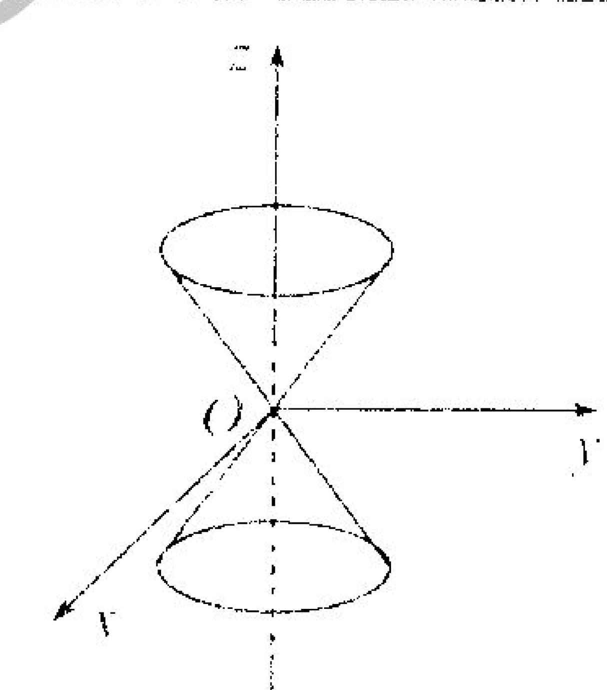
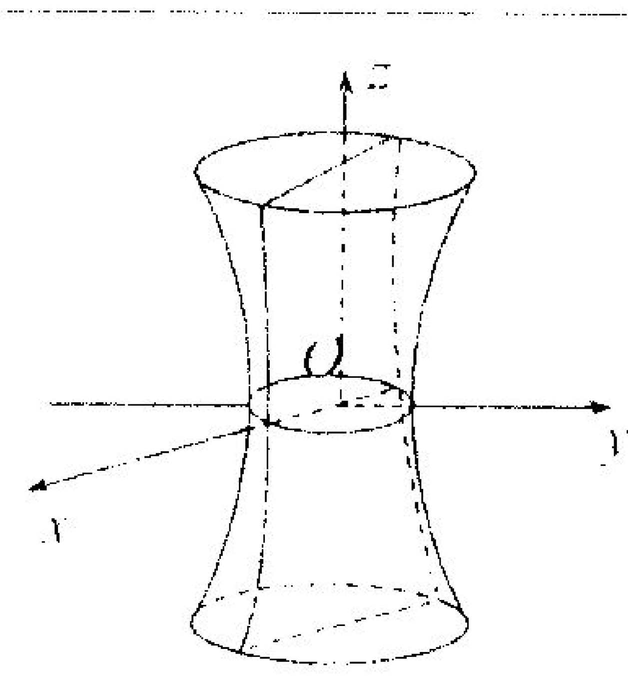
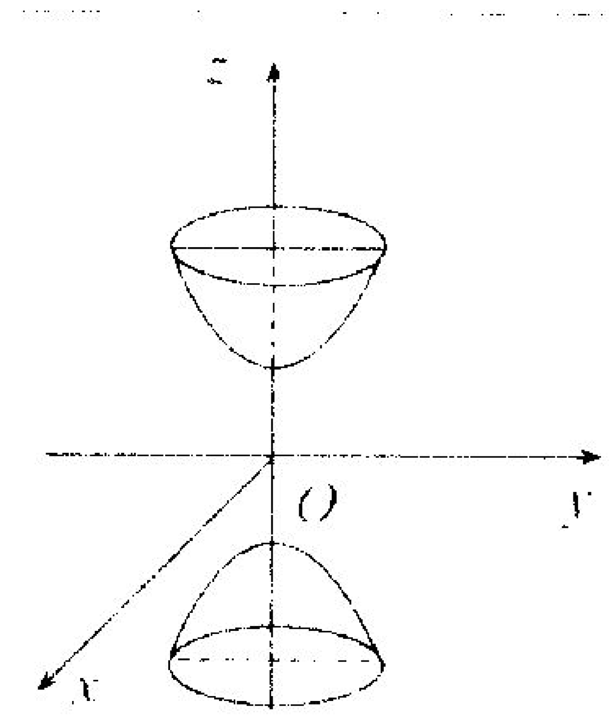
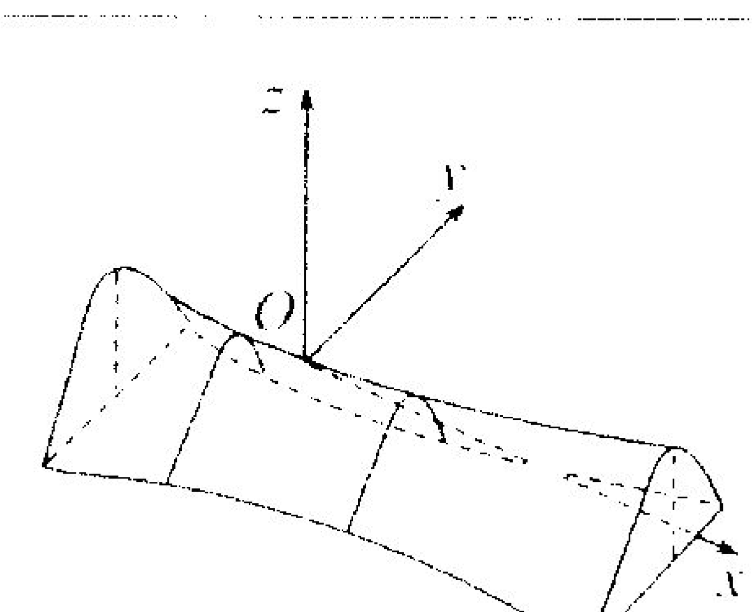
$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

即 $x-3y-2z+1=0$ 为 Π^* 的方程.

六、二次曲面

常见的二次曲面方程标准形式及图形见表 6-1.

表6-1

名称	方程形式	曲面图形
二次曲面	椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a,b,c)>0$ 球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$	
	抛物面 $z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}(p,q>0)$	
	椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$ 圆锥面 $x^2+y^2=z^2$	
	单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
	双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	
	双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$	

【例 6.25】指出下列方程所表示的曲面名称：

(1)$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$；　　(2)$y^2+(z-2)^2=3$；

(3)$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{3}=1$；　　(4)$z^2=2x$；

(5)$x^2+y^2=2z$；　　(6)$x^2+y^2-4z^2=0$.

【解】(1) 是球面，以(1,1,1)为球心，半径为$\sqrt{2}$.

(2) 是圆柱面，准线为：$\begin{cases}y^2+(z-2)^2=3\\x=0\end{cases}$，母线平行于 x 轴.

(3) 是椭球面.

(4) 是抛物柱面，准线为：$\begin{cases}z^2=2x\\y=0\end{cases}$，母线平行于 y 轴.

(5) 是旋转抛物面，曲线$\begin{cases}x^2=2z\\y=0\end{cases}$绕 z 轴旋转而成.

(6) 是圆锥面.

习　题　六

一、填空题

1. 设在坐标系$[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$中点 A 和点 M 的坐标依次为(x_0,y_0,z_0)和(x,y,z)，则向量$\overrightarrow{AM}$为________.
2. 设$\boldsymbol{a}=\{2,1,2\}$，$\boldsymbol{b}=\{4,-1,10\}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}$，且$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，则$\lambda=$________.
3. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 都是单位向量，且满足$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$________.
4. 过点(1,0,0)且以向量$\boldsymbol{n}=\{2,-3,1\}$为法向量的平面方程为________.
5. 过原点且方向数为$\{1,2,1\}$的直线方程为________.
6. 设平面 Π 过点$(1,0,-1)$且与平面$2x-y+2z-6=0$平行，则平面 Π 的方程为________.
7. 在直角坐标系 $Oxyz$ 中，xOy 平面上的抛物线$y=x^2$绕 y 轴旋转一周所生成的曲面方程为________.

二、选择题

1. 已知$\boldsymbol{a}=\{-1,2,3\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,-1,2\}$，则$\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{b})$等于

A. $\{-2,-4,12\}$.　　B. $\{0,1,1\}$.　　C. 6.　　D. 18.　　【　】

2. 已知有向直线 L 与向量$\boldsymbol{a}=\{2,2,-1\}$平行，则下列各组数中不能作为 L 的方向数的是

A. $\{-2,-2,1\}$.　　B. $\{1,1,-2\}$.

C. $\left\{\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right\}$.　　D. $\left\{-\dfrac{2}{3}\pi,-\dfrac{2}{3}\pi,\dfrac{\pi}{3}\right\}$.　　【　】

3. 平面$2y-5z=0$的位置特征是

A. 通过 x 轴.　　B. 通过 y 轴.

C. 通过 z 轴.　　D. 平行于 Oyz 平面.　　【　】

4. 设平面$P_1:ax+2y-3z+4=0$与平面$P_2:2x+7y+2z=0$互相垂直，则 a 等于

A. 0.　　B. 4.　　C. -4.　　D. 10.　　【　】

5. 方程$x^2+y^2-2z^2=1$表示的二次曲面是

A. 球面.　　B. 旋转抛物面.　　C. 单叶双曲面.　　D. 圆柱面.　　【　】

6. 设有直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 $\Pi:4x-2y+z-2=0$，则直线 L

A. 平行于 Π.　　B. 在 Π 上.

C. 垂直于 Π.　　D. 与 Π 斜交.　　【　】

7. 已知直线 L 的方程为 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$，其中所有系数均不为零，如果 $\dfrac{A_1}{D_1}=\dfrac{A_2}{D_2}$，则直线 L

A. 平行于 x 轴.　　B. 与 x 轴相交.

C. 通过原点.　　D. 与 x 轴重合.　　【　】

三、计算题

1. 设 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，$\boldsymbol{a}=\{3,-5,8\}$，$\boldsymbol{b}=\{-1,1,z\}$，求 z.

2. 求过点 $(4,-1,3)$ 且平行于直线 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{5}$ 的直线方程.

3. 求过两点 $M_1(3,-2,1)$ 和 $M_2(-1,0,2)$ 的直线方程.

4. 求过点 $(2,0,-3)$ 且与直线 $\begin{cases}x-2y+4z-7=0\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$ 垂直的平面方程.

5. 一直线通过点 $A(1,2,1)$，且垂直于直线 $L:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$，又和直线 $x=y=z$ 相交，求该直线方程.

6. 一平面过直线 $\begin{cases}x+5y+z=0\\x-z+4=0\end{cases}$，且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 垂直，求该平面方程.

7. 试确定下列各组中的直线间、平面间或直线和平面间的关系.

(1) $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{0}$，$\Pi:x+2y-z-6=0$；

(2) $L_1:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{2}$，$L_2:\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z+1}{7}$；

(3) $L_1:\begin{cases}x+2y+z-4=0\\2x+y+z-6=0\end{cases}$，$L_2:\begin{cases}4x+7y+z+10=0\\3x-y+2z-6=0\end{cases}$；

(4) $L:\begin{cases}x-y+2z-3=0\\x-y=0\end{cases}$，$\Pi:2x+2y-7=0$；

(5) $\Pi_1:4x-3y+5z=0$，$\Pi_2:12x-9y+15z-7=0$；

(6) $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+2}{5}$，$\Pi:4x+3y-z+3=0$.

8. 一平面与原点的距离为 6，且在三坐标轴上的截距之比 $a:b:c=1:3:2$，求该平面方程.

9. 判断下列曲面的名称：

(1) $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-y^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$；　　(2) $x-y^2-z^2=0$；

(3) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{5}+\dfrac{z^2}{5}=1$；　　(4) $x^2=-1+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{4}$.

参 考 答 案

一、1. $\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$； 2. 3； 3. $-\dfrac{3}{2}$；

4. $2x-3y+z-2=0$； 5. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$； 6. $2x-y+2z=0$； 7. $y=x^2+z^2$.

二、1. C 2. B 3. A 4. C 5. C 6. C 7. B

三、1. 1.

2. $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{5}$.

3. $\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.

4. $16x-14y-11z-65=0$.

5. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$.

6. $4x+5y-2z+12=0$.

7. (1) 平行. (2) 垂直. (3) 平行. (4) 垂直. (5) 平行. (6) 直线在平面上.

8. $6x+2y+3z\pm 42=0$.

9. (1) 圆柱面；(2) 抛物面；(3) 椭球面；(4) 双叶双曲面.